

4 1 「最小作用の原理」

自然の営みには、ほんのわずかの無駄もない。無駄がないのが自然のしくみである。

このことを知っていると、多くの法則を自然と導くことができる。

私の専門は電気なので、まず電気のことから書いてみたい。

例えば、電気はどのように流れるのか？

電気が流れると熱を発生する。

電気は、最も発熱の少なくなる通り道を選んで流れるのである。電気にとって、発熱は損失である。電気は熱より自由度があり利用価値が高いエネルギーなので、できるだけ熱にならないように運びたいわけである。だから、電気から熱を得る目的で使う電気ヒーターは勿体ない使い方、それならモーターでコンプレッサーを回し空気を圧縮して熱を得るヒートポンプの方がエネルギー効率がいい。エアコンの暖房はこの原理を利用している。簡単な電気回路で説明してみよう。

図 1 のような回路について、発熱が最小になるという条件で、電流がどのように流れるか計算してみる。抵抗 R_1 を電流 I_1 が、抵抗 R_2 を電流 I_2 が流れ、それが合流して抵抗 R_3 を電流 I_3 が流れるとする。

抵抗に電流が流れたときの発熱は、発熱量 = 電流² × 抵抗であるから、全体の発熱量を Q とすると、

$$Q = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 \quad \text{-----①}$$

$I_1 + I_2 = I_3$ から $I_2 = I_3 - I_1$ 、これを①式に入れて整理すると、

$$Q = I_1^2 (R_1 + R_2) + I_3^2 (R_2 + R_3) - 2I_1 I_3 R_2 \quad \text{-----②}$$

Q が最小になる I_1 は、 I_1 を変数として②式を微分して、

$$\frac{dQ}{dI_1} = 0 \quad \text{とおいて、}$$

$R_1 I_1 - R_2 I_3 + R_2 I_1 = 0$ これから、

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_3 \quad \text{-----③}$$

$I_1 = I_3 - I_2$ を③に入れて I_2 を求めると、

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I_3 \quad \text{-----④}$$

③、④式より、 R_1 を流れる電流は全電流 I_3 の $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ 倍、 R_2 を流れる電流は $\frac{R_1}{R_1 + R_2}$ 倍となる。

発熱量最小という条件から抵抗 R_1 、 R_2 に流れる電流を求めると、全電流 I_3 が抵抗の逆比で分流していることがわかる。

一方、オームの法則から抵抗 R_1 、 R_2 を流れる電流を計算してみる。

抵抗 R_1 、 R_2 を合成すると $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ 、従って全体の抵抗は $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3$ となる。

電圧 E をこの抵抗で割れば全電流 I_3 が求められ、

$$I_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \cdot E \quad \text{-----⑤}$$

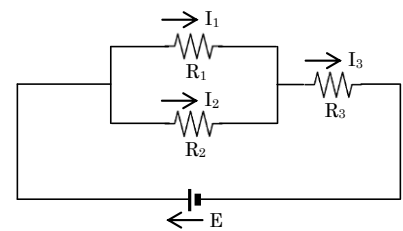


図 1 回路図

$I_3 = I_1 + I_2$ と⑤式より、 I_1, I_2 を求めると、

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \cdot E \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \cdot E \quad \text{となる。}$$

電圧 E を消去して I_1, I_2 を I_3 を使って表すと、

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_3 \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I_3 \quad \text{が導かれ、結果は③④式と見事に一致する。}$$

従って、電流は発熱量を最小にするように流れる、ということからオームの法則が導ける。

オームの法則を使うと、具体的な電流値を求めてから R_1, R_2 に分流する電流を計算することになるが、発熱量最小という原則からは、電圧に関係なく分流比を直接求めることができる。

これまでの計算は、単純にするために直流で考えたが交流でも同じである。以上のことを厳密にいうと「不均質な物質中を電流が流れるとき、発生する熱が最小となるように電流が分布する」ということになる。電流は金属中にある自由電子の流れで、その電子が金属を構成する原子に衝突するときに発熱するのであるから、電子は最も衝突の少ないルートを選んで物質中を流れていくということになるわけである。それは、電子にとって最もエネルギーを失わずに、楽に流れることができる道だからということなのだが、なぜ電子はそんなルートがわかるのだろうか？

次に、物体の運動についてはどうだろう？

地球上（重力場）において、物体の運動はどのようなになるのか？

図2において、物体が $x(t)$ （ある時刻 t に運動する点が x という位置にあることを示す）という道筋に沿って動くとして、地面からの位置（高さ）を x 、速度を v とすると、速度は位置 x の時間微分であるから $v = dx/dt$ 、運動エネルギーは $1/2mv^2$ 、ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を $V(x)$ とする。

運動のルートに沿って、各瞬間の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差をとり、初めの時刻 t_1 から終わりの時刻 t_2 まで合計（積分）したものを“作用 S ” とする。

この作用とは、物体が運動するときの“大変さ”のようなものだと考えればわかりやすい。

ある軌道 $x(t)$ に対して、作用 S を計算する。この S と本物の軌道 $\underline{x}(t)$ における作用 \underline{S} との差 $\underline{S} - S$ は、微小な軌道の差 $\eta(t)$ に対し1次の程度（複雑な関数を近似式を使って表わした時の1次の項→具体的にはテーラー級数で表した時の x' の項）が0でなければならない。2次の程度（ x'' の項）で違いがあるかも知れないが、1次では差が0でなくてはならない。そして、これはどの時刻 t 、どんな $\eta(t)$ でも成り立たなければならない。以上のことを式で表す。

作用 S は、①式で表される。

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt \quad \text{-----①}$$

ここで、 $\frac{dx}{dt}$ は位置 x の時間的变化、つまり速度を表すので $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ は運動エネルギー、 $V(x)$ はポテ

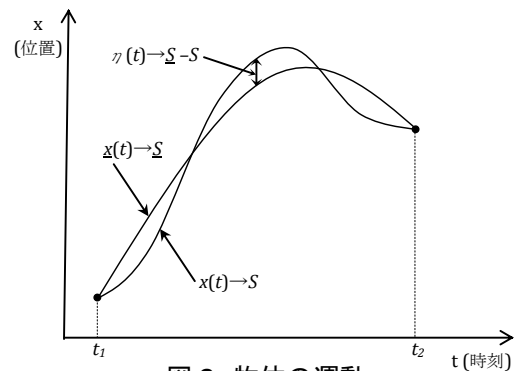


図2 物体の運動

ンシャルエネルギーを表す。

本物の軌道 $\underline{x}(t)$ は、 $\underline{x}(t) = x(t) - \eta(t)$ であるから、これを①式に入れると、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt \quad \text{-----②}$$

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2$$

ここで、1次以外の項は考えなくてよいとしたので、

$$\left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \text{を無視して、} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} \quad \text{-----③}$$

また点 $\underline{x} + \eta$ におけるポテンシャルエネルギー $V(\underline{x} + \eta)$ は、 η が微小なので、次のようにテーラー級数で表すことができる。

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{1}{2} \eta^2 V''(\underline{x}) + \dots$$

V' , V'' はそれぞれ V の1回, 2回微分で変化率を示している。

ここでも1次以外の項は考えなくて良いとしたので、 $\frac{1}{2} \eta^2 V''(\underline{x})$ 以降は無視して、

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) \quad \text{-----④}$$

③, ④式を②式に入れると、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt \quad \text{-----⑤}$$

⑤式において、最初の2項 $\frac{1}{2} m \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x})$ は、本当の軌道 \underline{x} についての作用 \underline{S} である。

ここで重要なのは S と \underline{S} の差 δS であるから⑤式から本物の軌道 \underline{S} を引いて、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt \quad \text{-----⑥}$$

部分積分の公式、 $\frac{d}{dt} (\underline{x} \cdot \eta) = \underline{x} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \eta \cdot \frac{d\underline{x}}{dt}$ より、

$$\underline{x} \cdot \eta = \int \underline{x} \cdot \frac{d\eta}{dt} dt + \int \eta \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} dt \quad \text{から、} \int \underline{x} \cdot \frac{d\eta}{dt} dt = \underline{x} \cdot \eta - \int \eta \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} dt \quad \underline{x} \rightarrow \frac{d\underline{x}}{dt} \text{ と置き換えて、⑥は、}$$

$$\delta S = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} dt - \int_{t_1}^{t_2} \eta V'(\underline{x}) dt$$

$$\delta S = m \left[\frac{d\underline{x}}{dt} \eta \right]_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \eta V'(\underline{x}) dt \quad \text{-----⑦}$$

最初と最後の点においては $S = \underline{S}$ であるから、 $\eta(t_1) = 0$, $\eta(t_2) = 0$ で、⑦式の第1項は0となり、第2項, 第3項をまとめると次のようになる。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta dt \quad \text{-----⑧}$$

S と本物の軌道 \underline{S} との差 η に対してあるものを掛けて、その積分が常に0ということは、

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} - V'(x) = 0 \text{ ということを意味する。}$$

このようにして作用は $m\frac{d^2x}{dt^2} + V'(x) = 0$ を満たす軌道に対して最小になる。

実は、この式はニュートンの運動方程式そのものである。

つまり、作用（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差の各瞬間瞬間の合計）が最小になる軌道がニュートンの法則を満たすのである。

その意味することは、速度の時間的変化（＝加速度）とポテンシャルエネルギーの時間的変化（＝力）の和は、各瞬間で常に0になるということを示している。

最小作用の原理が成り立つと、なぜ微分法則が成り立つのだろうか？軌道全体で最小ということは、軌道の無限小（各瞬間）の部分も最小でなければならないことになる。軌道全体にわたる大局的性質は、結局軌道の無限小部分もそれに適合していなければならないことになり、従って微分方程式が成り立つことになるのである。物体は最も“大変さ”のないように動くわけだ。

電気、運動（重力）ときて、次に光はどうだろうか？

光が進むときには何が最小になるのだろうか？光は物体の運動のように曲がって進むこともできるはずだが、実際には真直に進む。それはみな当然と思っている。真直に進むということは距離が最短ということか？でも、空中から水に入るときは曲がる。やはり進むときに使うエネルギーあるいはロスをできるだけ少なくするのではないか？この発想で光の進み方を考えてみよう。

光を微小粒子と考えると、光は原子や分子に衝突しながら進むことになる。衝突するということはエネルギーを失うことだから、できるだけ衝突で失うエネルギーが少なくなるように進むに違いない。

図3において、光がA→P→Bというように進むとき、A→Pは屈折率 n_1 、P→Bは屈折率 n_2 の媒質中を進むとする。 n_1 を空気のような密度の小さい物質、 n_2 を水のような比較的密度の大きい物質とし、光はできるだけエネルギーを失わないように進むと考えれば、進めるルートのうち AP間とPB間を通り抜ける合計の時間を最小にするように進むだろう。

一定距離を進むには時間が必要だから、結局最も時間のかからないルートを進むということと同じことだ。これをフェルマーの原理（光は一様媒質中では直進する。2つの媒質間の境界では屈折・反射する）とっている。

さて、問題は屈折の仕方である。

図でA→P→Bと光が進むとき、光の入射ポイントまでの水平距離を x とすると、

$$\text{距離 } S = AP + PB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$$

真空中の光の速度を c とすると、屈折率 n の媒質中の光の速度は遅くなり c/n となる。

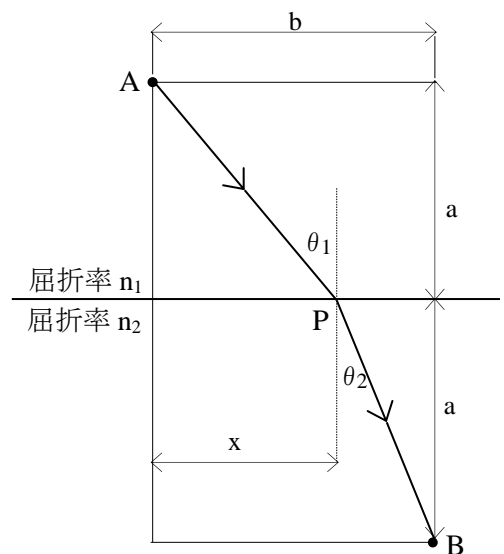


図3 光の進み方

光がAからBに到達するのに要する時間Tは、位置 x を変数として、

$$T = \frac{n_1}{c} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$$

光がAからBに到達するのに時間が最小となるように屈折するのだから、 x で微分して0とおけば、

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{b-x}{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = 0$$

ここで、入射前の角度を θ_1 入射後（屈折後）の角度を θ_2 とすると、

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \theta_1, \quad \frac{b-x}{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \sin \theta_2 \quad \text{だから、}$$

$$\frac{n_1}{c} \sin \theta_1 - \frac{n_2}{c} \sin \theta_2 = 0 \quad \text{よって、} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

これはスネルの式といい、光の屈折に関する法則である。

こうしてフェルマーの原理から、光の進み方に関するとてもシンプルで美しい式が導かれた。自然法則とは、このようにシンプルな式で表されるのである。

しかし、これだと出発点Aと到達点Bを決めてしまってから計算をスタートしているのだから、何か釈然としない。もっと納得のできる方法はないのだろうか？

光は波動としての一面もあり迂回したり回り込んだり、その伝わり方はホイヘンスの原理に基づいている。この原理を用いると、もっと納得できる説明ができる。

ホイヘンスの原理とは、前進する波の各点から出る小さな無数の球面波が重なり合って、（その包絡面が）次の波を作るというものである。

図4において、入射角を θ_1 、屈折角を θ_2 とする。媒質1、2の屈折率を n_1 、 n_2 、光の速度を v_1 、 v_2 とすると、

$$v_1 = \frac{c}{n_1}, \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad \text{である。}$$

いま、光がP点で入射した時、平行に進んで来た光はP'にあり、そこから水面上の点Q'に到達するまでにかかる時間を t とすると、

$$P'Q' = v_1 t = \frac{c}{n_1} t, \quad \text{一方この間に点Pの光は}$$

$$v_2 t = \frac{c}{n_2} t \quad \text{だけ進むので、半径} \quad \frac{c}{n_2} t \quad \text{(点線の半円上) のどこかに到達するはずである。}$$

実際に到達するのは、この円上のどの点かということだが、それは点Q'からこの円に引いた接線上の点Qということになるのである。

それを証明するためにはPP'の間に任意の点Xをとる。点Xを通る光は時刻 t_1 後に水面上の点 X_0 に到達し、 t_2 後にQQ'上の点 X' に到達するとすれば $XX_0 = ct_1/n_1$ 、 $X_0X' = ct_2/n_2$ となる。

$\triangle PP'Q'$ と $\triangle PXX_0$ 、 $\triangle Q'PQ$ と $\triangle Q'X_0X'$ は相似三角形だから、

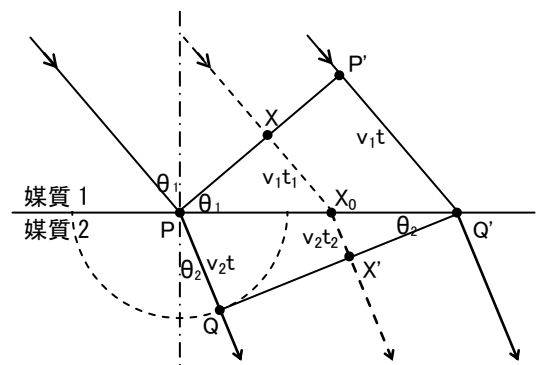


図4 光の屈折

$$\frac{XX_0}{P'Q'} = \frac{PX_0}{PQ'}, \quad \frac{X_0X'}{PQ} = \frac{X_0Q'}{PQ'}$$

ここで、 $P'Q' = v_1t$, $XX_0 = v_1t_1$, $PQ = v_2t$, $X_0X' = v_2t_2$ だから、

$$\frac{v_1t_1}{v_1t} = \frac{PX_0}{PQ'}, \quad \frac{v_2t_2}{v_2t} = \frac{X_0Q'}{PQ'}$$

この2つの式のそれぞれの辺を加えて整理すると、

$$\frac{t_1 + t_2}{t} = \frac{PX_0 + X_0Q'}{PQ'} = \frac{PQ'}{PQ'} = 1$$

$t_1 + t_2 = t$ ということは、 X を通る光は X_0 で屈折して t 秒後にちょうど X' に到達するという意味を意味し、これが任意の点で成り立つということは、 $P - X - P'$ のラインは t 秒後に $Q - X' - Q'$ に移るということである。よって点 P に入射した光は、点 Q' から引いた接線上の点 Q の方向に屈折することが証明された。

光は粒子と波動の二面性があることは前に述べた。粒子ととらえると光は直進し、また境界面では屈折や反射するが、これは光が最も早く到達するように最短ルートを選んで進むためだ。これがフェルマーの原理である。一方、波動ととらえると光はあらゆる経路をとるが、観測される波はいろいろな経路を辿った波の和である。経路によって波はいろいろな位相をとることになり、加えられる波の位相差が大きすぎると互いに消しあってしまう。結局残る波は同じ位相で強められた波であり、これが光の進む方向である。これがホイヘンスの原理というわけである。

電気、運動、光とみてきたがこればかりではない。自然は最も無駄なく振舞うという原則から、物理学最大の原理である、一般相対性理論のアインシュタイン方程式、電磁気学におけるマクスウェル方程式、そして確率密度で表される量子力学の運動法則さえも導くことができるのである。

光は電磁波の一種であり、その速度は「17 相対性理論」で述べたように真空中で $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

$= 3 \times 10^8$ [m/s] 秒速 30 万 km である。（ $\epsilon_0 \mu_0$ は真空の誘電率、透磁率）

媒質中での光の速度 v は、媒質の比誘電率を ϵ_r 、比透磁率を μ_r とすると $v = c \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ となる。

（比誘電率、比透磁率は真空に対するその媒質の誘電率、透磁率の比である）

ここで、比透磁率 μ_r は光の周波数付近においては 1 とみなせるので、 $v = c \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$ となり、媒質中の光の

速度は誘電率によって決まることがわかる。屈折率 n は、真空の誘電率 (ϵ_0) と媒質の誘電率 (ϵ) のルートの比であるから、 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ となり、結局屈折率とは比誘電率のルートに等しいことになる。

電界（単位長さあたりの電圧）中の物質（媒質）は、+ の原子核に対して - の電子が反対方向に変位（移動）する。つまり、原子の中で原子核と電子の位置関係が変化、これを分極というが、誘電率とはまさに分極のしやすさの度合いを示すものである。電磁波は電界から磁界が誘起され、その磁界から電界が誘起される……というように、次々と波が伝わっていく現象だ。だから、電磁波である光の速度は、誘電率に依存することになるというわけである。

太陽から地球にやってくる光は大気圏に入ると、屈折して曲がる。大気圏では、地上に近づけば近づ

くほど空気が濃くなり、光の速度が遅くなるので地上から遠いところで距離を稼ぐ。

従って、大気圏に進入直後は直進し、地表に近づくにつれて徐々に曲がり、できるだけ垂直に近い角度で地表面に入る。だから日没時は実際の太陽は地平線に沈んでしまっているにもかかわらず、まだ見えているのである。

大気圏内では太陽の光は空気分子や水蒸気分子に衝突し、それによって散乱される。散乱のされかたは光の波長によって異なり、波長の短い青色光は長い赤色光よりも多く散乱される。多く散乱された青色光は四方八方から地上に降り注ぐので、上空の空は一面青く見えるのである。

そして、夕方の光は太陽高度の低い位置から斜めに大気圏を横切ってくるので、日中よりはるかに遠い位置で散乱される。だから散乱される度合いの少ない赤色の光の到達する割合が多くなり、夕陽は赤色になるのである。“夕陽が赤いと明日は雨になる”と言うが、それは湿度が高く空気中に水蒸気分子がより多く存在するためだろう。

このように、青空も夕陽もスッキリと説明ができてしまう。(2013.01.11)